# محاسبۀ حد به روش بازآفرینی!

**عنایت‌الله راستی‌زاده**
دبیر ریاضی، شیراز

**اشاره**

**در توابع کسری مثلثاتی، هرگاه در همسایگی نقطه داده شده، صورت و مخرج کسر به سمت صفر میل کنند، با یکی از مهم‌ترین حالت‌های حدی روبه‌رو هستیم. رفع ابهام از چنین حدهایی دارای روش‌های متفاوت است و غالباً به کمک تغییر متغیر یا استفاده از دستورها و اتحادهای مثلثاتی امکان‌پذیر است. اما در مقالۀ کوتاه اخیر، مؤلف به دو نمونۀ خاص می‌پردازد که با چشم‌پوشی از روش‌های تستی (و قاعدۀ هوپیتال) و تنها با اتکا به مطالب درسی، راه‌حل دور از دست می‌نماید!**

**حد دو تابع $f(x)=\frac{x-\sin x}{x^۳}$ و $g(x)=\frac{x-\tan x}{x^۳}$ وقتی x به صفر می‌گراید، با کنار نهادن روش‌های معمول، چالش‌برانگیز است.**

**در روش حل ارائه شده، خواهیم دید حد تابع به نوعی خودش در محاسبۀ خودش نقش دارد؛ به‌گونه‌ای که آن را بازآفرینی می‌کند!**

**نمونۀ ۱.** نشان دهید:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x-\sin x}{x^۳}=\frac{۱}{۶}$$

**حل:** با انتخاب x=۳t و توجه به اینکه وقتی x→۰، آن‌گاه t→۰ و با فرض $\lim_{x\to ۰}\frac{x-\sin x}{x^۳}=\alpha$ داریم:

$$\alpha=\lim_{t\to ۰}\frac{۳t-\sin ۳t}{۲۷t^۳}=\lim_{t\to ۰}\frac{۳t-۳\sin t+۴\sin^۳ t}{۲۷t^۳}$$

$$\Rightarrow \alpha=\lim_{t\to ۰}\frac{۳t-۳\sin t}{۲۷t^۳}+\lim_{t\to ۰}\frac{۴\sin t^۳}{۲۷t^۳}$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{۱}{۹}\lim_{t\to ۰}\frac{t-\sin t}{t^۳}+\frac{۴}{۲۷}\lim_{t\to ۰}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^۳$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{۱}{۹}\alpha+\frac{۴}{۲۷}(۱)^۳$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{۱}{۶}$$

**نمونۀ ۲.** محاسبۀ $\lim_{x\to ۰}\frac{x-\tan x}{x^۳}$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x-\tan x}{x^۳}=\alpha\ ;\ \ x=۳t\ (x\to ۰\Leftrightarrow t\to ۰)$$

$$\alpha=\lim_{t\to ۰}\frac{۳t-\tan ۳t}{۲۷t^۳}=\lim_{t\to ۰}\frac{۳t-\frac{۳\tan t-\tan^۳ t}{۱-۳\tan^۲ t}}{۲۷t^۳}$$

$$\Rightarrow \alpha=\lim_{t\to ۰}\frac{۱}{۱-۳\tan^۲ t}\times\lim_{t\to ۰}\frac{۳t-۹t.\tan^۲ t-۳\tan t+\tan^۳ t}{۲۷t^۳}$$

$$\Rightarrow \alpha=(۱)\lim_{t\to ۰}\frac{۳t-۳\tan t}{۲۷t^۳}-\lim_{t\to ۰}\frac{۹t\tan^۲ t-\tan^۳ t}{۲۷t^۳}$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{۱}{۹}\alpha-\lim_{t\to ۰}\frac{۹t\tan^۲ t}{۲۷t^۳}+\lim_{t\to ۰}\frac{\tan^۳ t}{۲۷t^۳}$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{۱}{۹}\alpha-\frac{۱}{۳}\lim_{t\to ۰}\left(\frac{\tan t}{t}\right)^۲+\frac{۱}{۲۷}\lim_{t\to ۰}\left(\frac{\tan t}{t}\right)^۳$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{۱}{۹}\alpha-\frac{۱}{۳}(۱)+\frac{۱}{۲۷}(۱)$$

$$\Rightarrow \alpha-\frac{۱}{۹}\alpha=-\frac{۸}{۲۷}\Rightarrow\frac{\cancel{۸}\alpha}{۹}=\frac{-\cancel{۸}}{۲۷}$$

$$\Rightarrow \alpha=-\frac{۱}{۳}$$

### ● چه تابعی؟ چه تغییر متغیری؟!

سؤالی که ممکن است در حاشیه مقاله اخیر مطرح باشد، این است که این روش (روشی که حد تابع به نوعی خودش در محاسبۀ خودش نقش دارد) اولاً برای چه توابعی قابل استفاده است و دیگر اینکه برای محاسبه، چه تغییر متغیری مناسب است. در پاسخ به سؤال نخست می‌توان انتظار داشت که تنها در توابعی

روش بازآفرینی را بتوانیم به‌کار ببندیم که در مراحل محاسبه (و پس از استفاده از اتحادها، روابط و محاسبات) به نوعی به‌صورت اولیه سؤال (تابع) داده شده بازگردیم (که در ۲ نمونهٔ اخیر مشاهده شد). در پاسخ سؤال دوم باید متذکر این نکته شد که تغییر متغیر باید هدف ما را که **تکرار صورت مسئله** است (بازآفرینی) دربرگیرد.

در مثال $f(x)=\frac{x-\sin x}{x^3}$، با تغییر $x=3t$ و توجه به اینکه $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$، وجود $3t$ و $3\sin t$ را در صورتِ کسرِ تغییر یافته، به‌دنبال دارد که خود دسترسی به هدف را تضمین می‌کند.

در تلاش برای تکمیل موضوع و پاسخ به پرسش «چه تابعی؟ چه تغییر متغیری؟»

آموزنده است که حتی تغییر متغیر $x=2t$ برای محاسبهٔ $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ نیز به بازآفرینی و دریافت پاسخ می‌انجامد!

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\beta,\quad x=2t$$

$$\beta=\lim_{t\to 0}\frac{2t-\sin 2t}{8t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{2t-2\sin t\cos t}{8t^3}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t\cos t}{4t^3}$$

$$\beta=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t(1-2\sin^2\frac{t}{2})}{4t^3}$$

$$\Rightarrow \beta=\lim_{t\to 0}\frac{(t-\sin t)+(2\sin t\sin^2\frac{t}{2})}{4t^3}$$

$$\Rightarrow \beta=\frac{1}{4}\underbrace{\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}}}_{\beta}+\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t.\sin^2\frac{t}{2}}{t^3}$$

$$\beta=\frac{1}{4}\beta+\frac{1}{2}(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t})(\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{t}{2}}{t})^2$$

$$\Rightarrow \beta=\frac{1}{4}\beta+\frac{1}{2}(1)(\frac{1}{4})\Rightarrow \frac{3}{4}\beta=\frac{1}{8}\Rightarrow \beta=\frac{1}{6}$$

**تمرین:**

$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}$ را به روش بازآفرینی و با تغییر متغیر $x=2t$ به‌دست آورید.



غلامرضا یاسی‌پور

# حل یک قضیهٔ قدیمی و مهم از راهی بسیار ساده

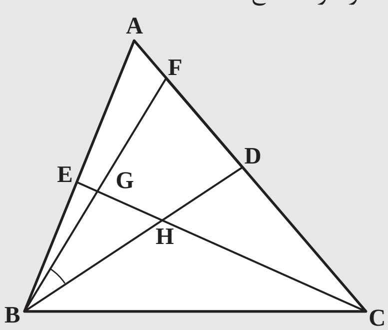
در مثلث متساوی‌الساقین، نیم‌سازهای داخلی نظیر زاویه‌های قاعده با هم برابرند.

اثبات این قضیه بسیار ساده است. اما عکس این قضیه یعنی: «اگر در مثلثی دو نیم‌ساز داخلی برابر باشند، آن مثلث متساوی‌الساقین است»، اصلاً آسان نیست. در واقع بیش از ۲۰ قرن این قضیه حل نشده باقی ماند تا اینکه در قرن هفدهم مهندسی فرانسوی به‌نام **دسکوپ** آن را حل کرد. پس از این راه‌حل نیز به‌نظر می‌رسید که راه‌حل دیگری برای آن به‌دست نیاید، اما چنین نبود. بعدها چندین راه‌حل برای این قضیه یافت شد.

در ایران مترجم نامی، مرحوم **احمد آرام** آن را حل کرده است. در اینجا راه‌حلی را که شاید ساده‌ترین راه اثبات این قضیه باشد، می‌آوریم و می‌خواهیم این نکته را مطرح کنیم که غالباً اثبات یک قضیه، به‌عنوان نتیجهٔ یک قضیهٔ قبلاً اثبات شده، از اثبات مستقیم آن آسان‌تر است.

- **در هر مثلث نیم‌ساز زاویهٔ بزرگ‌تر، از نیم‌ساز زاویهٔ کوچک‌تر، کوچک‌تر است.**

- **حل:** اگر در مثلث ABC زاویهٔ B بزرگ‌تر از زاویهٔ C و اضلاع BD و CE نیم‌ساز این زاویه‌ها باشند، از B و روی BD زاویه‌ای مساوی زاویه $\frac{C}{2}$ جدا می‌کنیم تا AC را در F قطع کند.




اگر H و G نقاط برخورد BD و BF با CE باشند، دو مثلث FBD و FCG متشابه‌اند (زیرا زاویه‌هایشان مساوی است) و داریم: BF: CF=BD: CG. اما در مثلث BFC زاویهٔ رأس C از زاویهٔ رأس B کمتر است، پس: BF<CF. نظر به تناسب فوق باید BD<CG باشد و چون CG<CE است، پس BD<CE می‌شود.

**نتیجه:** اگر در مثلثی دو نیم‌ساز مساوی باشند، مثلث متساوی‌الساقین است. (چگونه؟ از برهان خلف استفاده کنید.) مسئله برای دو نیم‌ساز خارجی صدق نمی‌کند.